7.1 – 7.7

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Δύο θεμελιώδεις ισοδυναμίες

Αν $\alpha,\ \beta \neq 0$ ευθ.τμήματα και $x > 0$ τότε

- $\dfrac{\alpha}{x} = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = x\beta$
- $\dfrac{\alpha}{\beta} = x \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = x\beta$

2.
Ιδιότητες αναλογιών

- $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\delta = \beta\gamma$ (γινόμενο άκρων = γινόμενο μέσων)
- $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\alpha}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\delta}$ (εναλλαγή των μέσων)
- $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\delta}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ (εναλλαγή των άκρων)
- $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \dfrac{\gamma \pm \delta}{\delta}$ (πρόσθεση των παρανομαστών στους αριθμητές)
- $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\alpha}{\beta \pm \alpha} = \dfrac{\gamma}{\delta \pm \gamma}$ (πρόσθεση των αριθμητών στους παρανομαστές)
- $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \cdot\ \cdot\ \cdot = \dfrac{\kappa}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\alpha+\gamma+\cdot\ \cdot\ \cdot+\kappa}{\beta+\delta+\cdot\ \cdot\ \cdot\ \lambda} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (πρόσθεση αριθμητών, πρόσθεση παρανομαστών)

3.
Πρόβλημα

Σημείο Μ διαιρεί εσωτερικά τμήμα $AB = \alpha$ σε λόγο λ. Να υπολογιστούν τα τμήματα ΜΑ, ΜΒ.

Απάντηση

$$\frac{MA}{MB} = \frac{\lambda}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{MA}{MB+MA} = \frac{\lambda}{\lambda+1}$$

$$\frac{MA}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda+1}$$

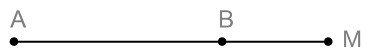
$$MA = \frac{\lambda}{\lambda+1}\alpha$$

4.

Πρόβλημα

Σημείο Μ διαιρεί εξωτερικά τμήμα ΑΒ = α σε λόγο $\lambda > 1$. Να υπολογιστούν τα τμήματα ΜΑ, ΜΒ.

Απάντηση



$$\frac{MA}{MB} = \frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow \frac{MA}{MA - MB} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

$$\frac{MA}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

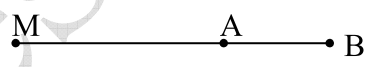
$$MA = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\,\alpha$$

5.

Πρόβλημα

Σημείο Μ διαιρεί εξωτερικά τμήμα ΑΒ = α σε λόγο $\lambda < 1$. Να υπολογιστούν τα τμήματα ΜΑ, ΜΒ.

Απάντηση



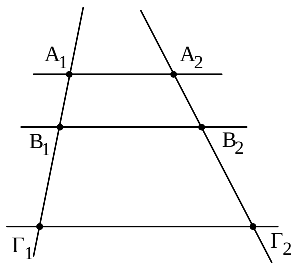
$$\frac{MA}{MB} = \frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow \frac{MA}{MB - MA} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}$$

$$\frac{MA}{\alpha} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}$$

$$MA = \frac{\lambda}{1 - \lambda}\,\alpha$$

6.

Θεώρημα Θαλή



$A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel \Gamma_1\Gamma_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1\Gamma_1}{B_2\Gamma_2}$

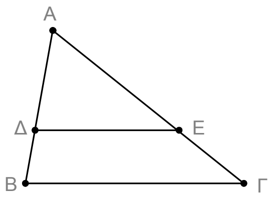
Αντίστροφο (ας πούμε)

$A_1A_2 \parallel B_1B_2$ και $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1\Gamma_1}{B_2\Gamma_2} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_1\Gamma_2 \parallel B_1B_2$

7.

Εφαρμογή του Θ.Θ στο τρίγωνο

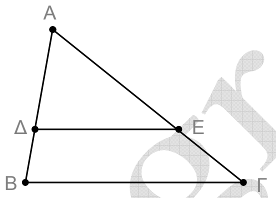
$$ΔΕ \,//\, ΒΓ \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΔΒ}{ΕΓ}$$



8.

Θεώρημα

$ΔΕ \,//\, ΒΓ \quad \Rightarrow$ τα τρίγωνα έχουν ανάλογες πλευρές



9.

Αρμονική τετράδα

Δύο σημεία Γ, Δ που διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά τμήμα ΑΒ στον ίδιο λόγο, λέγονται συζυγή αρμονικά των Α, Β.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

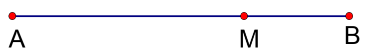
1.

Σημείο Μ χωρίζει εσωτερικά τμήμα ΑΒ σε λόγο $\frac{5}{2}$. Να υπολογιστούν οι λόγοι

$$\frac{ΜΒ}{ΜΑ}, \quad \frac{ΑΜ}{ΑΒ}, \quad \frac{ΑΒ}{ΜΒ}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ΜΒ}{ΜΑ} = \frac{2}{5}$$



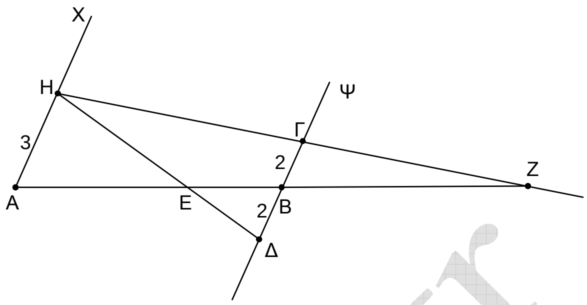
$$\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ΜΑ}{ΜΑ + ΜΒ} = \frac{5}{5+2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ΑΜ}{ΑΒ} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ΜΑ + ΜΒ}{ΜΒ} = \frac{5+2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ΑΒ}{ΜΒ} = \frac{7}{2}$$

2.

Να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο ΑΒ τμήμα α) εσωτερικά και β) εξωτερικά σε δύο τμήματα με λόγο $\frac{3}{2}$

Προτεινόμενη λύση



Από το Α φέρω ημιευθεία ΑΧ, στην οποία παίρνω τμήμα ΑΗ = 3. Από το Β φέρνω την ΒΨ // ΑΧ και πάνω σ' αυτή παίρνω τμήματα ΒΓ = ΒΔ = 2

Οι ΗΔ, ΗΓ τέμνουν την ευθεία ΑΒ σε σημεία Ε, Ζ, τα οποία είναι τα ζητούμενα, διότι :

$$AH // B\Delta \quad \Rightarrow \quad \frac{EA}{EB} = \frac{AH}{B\Delta} = \frac{3}{2}$$

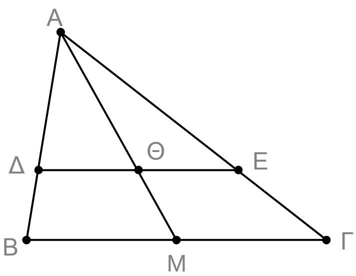
$$B\Gamma // AH \quad \Rightarrow \quad \frac{ZA}{ZB} = \frac{AH}{B\Gamma} = \frac{3}{2}$$

3.

Από το κέντρο βάρους Θ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλη στην ΒΓ η οποία τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε . Να υπολογίσετε τους λόγους

$\frac{A\Delta}{\Delta B}$, $\frac{A\Gamma}{E\Gamma}$, $\frac{A\Delta + AE}{AB + A\Gamma}$

Προτεινόμενη λύση



$$\Theta \text{ κέντρο βάρους} \quad \Rightarrow \quad \frac{A\Theta}{\Theta M} = 2$$

$$\Delta\Theta // BM \quad \Rightarrow \quad \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{A\Theta}{\Theta M} = 2$$

$$\Theta E // M\Gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{A\Gamma}{E\Gamma} = \frac{AM}{\Theta M} = \frac{AM}{\frac{1}{3}AM} = 3$$

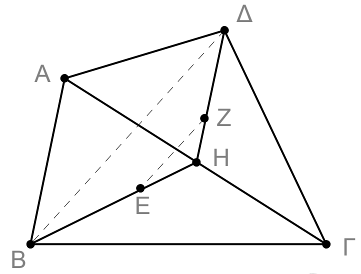
$$\Delta E // B\Gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{A\Theta}{AM} = \frac{\frac{2}{3}AM}{AM} = \frac{2}{3}$$

Όμως $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{A\Delta + AE}{AB + A\Gamma}$, άρα $\frac{A\Delta + AE}{AB + A\Gamma} = \frac{2}{3}$

4.

Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ τα κέντρα βάρους των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΓ αντίστοιχα. Δείξτε ότι ΕΖ // ΒΔ

Προτεινόμενη λύση



Έστω Η το μέσο της ΑΓ.

Ε βαρύκεντρο του ΑΒΓ $\Rightarrow \frac{ΗΕ}{ΗΒ} = \frac{1}{3}$

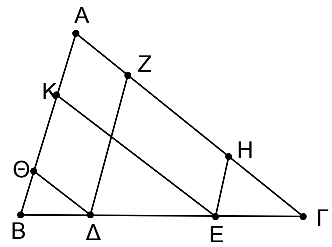
Η βαρύκεντρο του ΑΔΓ $\Rightarrow \frac{ΗΖ}{ΗΔ} = \frac{1}{3}$

Άρα $\frac{ΗΕ}{ΗΒ} = \frac{ΗΖ}{ΗΔ} \Rightarrow$ ΕΖ // ΒΔ (από το τρίγωνο ΗΒΔ)

5.

Από δύο σημεία Δ, Ε της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τις ΔΖ, ΕΗ παράλληλες προς την ΑΒ και τις ΔΘ, ΕΚ παράλληλες προς την ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΚΘ}{ΖΗ}$

Προτεινόμενη λύση



ΔΘ // ΕΚ // ΓΑ $\Rightarrow \frac{ΑΒ}{ΚΘ} = \frac{ΓΒ}{ΕΔ}$ **(1)**

ΕΗ // ΔΖ // ΒΑ $\Rightarrow \frac{ΓΒ}{ΕΔ} = \frac{ΓΑ}{ΗΖ}$ **(2)**

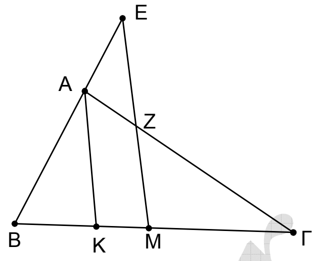
Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $\frac{ΑΒ}{ΚΘ} = \frac{ΑΓ}{ΖΗ} \Leftrightarrow$

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΚΘ}{ΖΗ}$$

6.

Ευθεία (ε) διέρχεται από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Ε, Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{AE}{AZ} = \dfrac{BE}{\Gamma Z}$

Προτεινόμενη λύση



Φέρνω την ΑΚ // ΕΜ.

Τότε $\dfrac{BE}{AE} = \dfrac{BM}{KM}$ **(1)**

και $\dfrac{\Gamma Z}{AZ} = \dfrac{\Gamma M}{KM}$ **(2)**

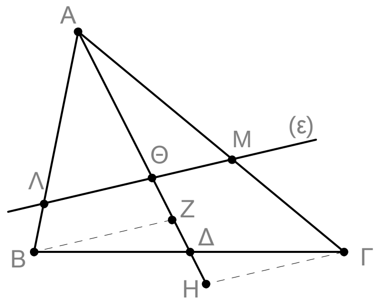
Επειδή ΒΜ = ΓΜ, τα δεύτερα μέλη των (1), (2) είναι ίσα, άρα θα είναι και $\dfrac{BE}{AE} = \dfrac{\Gamma Z}{AZ}$

$$\frac{AE}{AZ} = \frac{BE}{\Gamma Z}$$

7.

Ευθεία (ε) διέρχεται από το κέντρο βάρους Θ τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει την ΑΒ στο Λ και την ΑΓ στο Μ. Να δείξετε ότι $AB \cdot AM + A\Gamma \cdot A\Lambda = 3A\Lambda \cdot AM$

Προτεινόμενη λύση



Διαιρούμε τα δύο μέλη της αποδεικτέας με ΑΛ · ΑΜ. Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{AB}{A\Lambda} + \frac{A\Gamma}{AM} = 3$$

Φέρουμε ΒΖ // ΛΘ, οπότε $\dfrac{AB}{A\Lambda} = \dfrac{AZ}{A\Theta}$ **(1)**

Φέρουμε ΓΗ // ΘΜ, οπότε $\dfrac{A\Gamma}{AM} = \dfrac{AH}{A\Theta}$ **(2)**

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (2) : $\dfrac{AB}{A\Lambda} + \dfrac{A\Gamma}{AM} = \dfrac{AZ + AH}{A\Theta}$ **(3)**

τρ. ΒΖΔ = τρ. ΓΔΗ $\Rightarrow$ ΖΔ = ΔΗ.

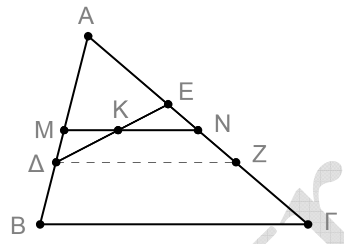
Είναι ΑΖ + ΑΗ = ΑΔ – ΖΔ + ΑΔ + ΔΗ = 2ΑΔ

Οπότε η (3) γίνεται $\dfrac{AB}{A\Lambda} + \dfrac{A\Gamma}{AM} = \dfrac{2A\Delta}{A\Theta} = 2\dfrac{A\Delta}{A\Theta} = 2 \cdot \dfrac{3}{2} = 3$

8.

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E των AB, $A\Gamma$ αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύει $\dfrac{\Delta A}{\Delta B} = \dfrac{E\Gamma}{EA}$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που ενώνει τα μέσα M, N των AB, $A\Gamma$ διέρχεται από το μέσο του ΔE.

Προτεινόμενη λύση



Έστω K το σημείο τομής των MN, ΔE.
Φέρουμε $\Delta Z \parallel MN \parallel B\Gamma$.

Τότε $\dfrac{\Delta A}{\Delta B} = \dfrac{ZA}{Z\Gamma}$ και λόγω της υπόθεσης

$$\frac{E\Gamma}{EA} = \frac{ZA}{Z\Gamma}$$

$$\frac{E\Gamma + EA}{EA} = \frac{ZA + Z\Gamma}{Z\Gamma}$$

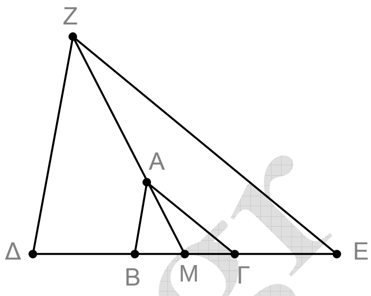
$$\frac{A\Gamma}{EA} = \frac{A\Gamma}{Z\Gamma} \iff EA = Z\Gamma \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή όμως το N είναι μέσο του $A\Gamma$, λόγω της (1), θα είναι μέσο και του EZ
Τότε, στο τρίγωνο $E\Delta Z$, το N είναι μέσο του EZ και $NK \parallel \Delta Z$, άρα το K θα είναι μέσο του ΔE

9.

Στις προεκτάσεις της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε, έτσι ώστε ΒΔ = ΒΓ = ΓΕ και από τα Δ, Ε φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς τις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Αν Ζ είναι το σημείο τομής αυτών των παραλλήλων, να αποδείξετε ότι το Α είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΖΔΕ.

Προτεινόμενη λύση



Φέρνω τη ΖΑ και έστω Μ το σημείο τομής της με την ΒΓ.

ΑΒ // ΖΔ $\Rightarrow \dfrac{MB}{\Delta B} = \dfrac{MA}{AZ}$ **(1)**

ΑΓ // ΖΕ $\Rightarrow \dfrac{M\Gamma}{\Gamma E} = \dfrac{MA}{AZ}$ **(2)**

(1) και (2) $\Rightarrow \dfrac{MB}{\Delta B} = \dfrac{M\Gamma}{\Gamma E}$

Και επειδή ΔΒ = ΓΕ, θα είναι ΜΒ = ΜΓ, δηλαδή το Μ είναι μέσο της ΒΓ.

Είναι ΒΜ = $\dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{\Delta B}{2}$

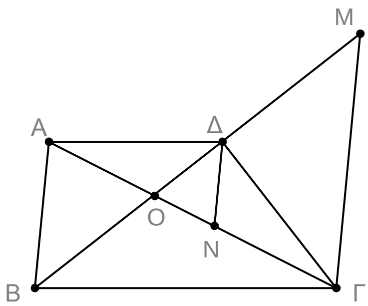
Η (1) γίνεται $\dfrac{\frac{\Delta B}{2}}{\Delta B} = \dfrac{MA}{AZ} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{MA}{AZ}$

άρα το Α είναι κ.βάρους του τριγώνου ΖΔΕ

10.

Από τις κορυφές Γ και Δ τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΔ //ΒΓ) φέρνουμε παράλληλες προς την ΑΒ. Αν οι παράλληλες αυτές τέμνουν τις ευθείες ΒΔ, ΑΓ στα Μ, Ν αντίστοιχα, να δείξετε ότι $AB^2 = \Gamma M \cdot \Delta N$

Προτεινόμενη λύση



Αρκεί να δείξουμε ότι $\dfrac{AB}{\Gamma M} = \dfrac{\Delta N}{AB}$

Έστω Ο το σημείο τομή των διαγωνίων του τραπεζίου

ΑΒ // ΔΝ $\Rightarrow \dfrac{\Delta N}{AB} = \dfrac{O\Delta}{OB}$ **(1)**

ΑΒ // ΓΜ $\Rightarrow \dfrac{AB}{\Gamma M} = \dfrac{OA}{O\Gamma}$ **(2)**

ΑΔ // ΒΓ $\Rightarrow \dfrac{O\Delta}{OB} = \dfrac{OA}{O\Gamma}$ **(3)**

Από τις (1), (2), (3) έχομε ότι $\dfrac{\Delta N}{AB} = \dfrac{AB}{\Gamma M}$

11.

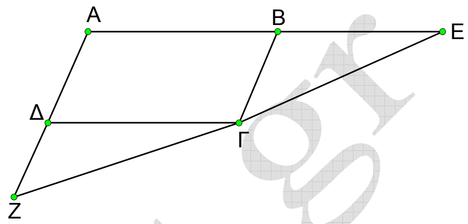
Ευθεία (ε) διέρχεται από την κορυφή Γ παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ και τέμνει τις ευθείες ΑΒ, ΑΔ στα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

i) Αν η (ε) δεν τέμνει το παραλληλόγραμμο, τότε $\frac{ΑΒ}{ΑΕ}+\frac{ΑΔ}{ΑΖ}=1$

ii) Αν η (ε) τέμνει το παραλληλόγραμμο, τότε $\left|\frac{ΑΒ}{ΑΕ}-\frac{ΑΔ}{ΑΖ}\right|=1$

Προτεινόμενη λύση

i)



$ΑΖ \,//\, ΒΓ \;\Rightarrow\; \frac{ΑΒ}{ΑΕ}=\frac{ΖΓ}{ΖΕ}$ **(1)**

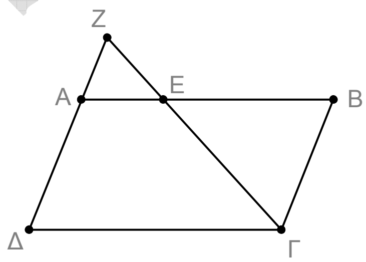
$ΔΓ \,//\, ΑΕ \;\Rightarrow\; \frac{ΔΑ}{ΑΖ}=\frac{ΓΕ}{ΕΖ}$ **(2)**

$(1)+(2) \;\Rightarrow\; \frac{ΑΒ}{ΑΕ}+\frac{ΔΑ}{ΑΖ}=\frac{ΖΓ}{ΖΕ}+\frac{ΓΕ}{ΕΖ}$

$$\frac{ΑΒ}{ΑΕ}+\frac{ΔΑ}{ΑΖ}=\frac{ΖΓ+ΓΕ}{ΖΕ}=\frac{ΖΕ}{ΖΕ}=1$$

ii)

α) Το Ε εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΒ

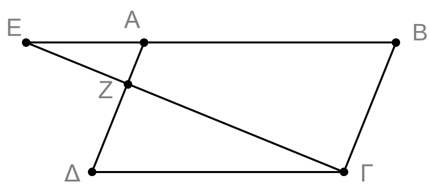


$$(1)-(2) \;\Rightarrow\; \frac{ΑΒ}{ΑΕ}-\frac{ΔΑ}{ΑΖ}=\frac{ΖΓ}{ΖΕ}-\frac{ΓΕ}{ΕΖ}$$

$$=\frac{ΖΓ-ΕΓ}{ΖΕ}$$

$$=\frac{ΖΕ}{ΖΕ}=1$$

β) Το Ζ εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΔ



$$(2)-(1) \;\Rightarrow\; \frac{ΔΑ}{ΑΖ}-\frac{ΑΒ}{ΑΕ}=\frac{ΓΕ}{ΕΖ}-\frac{ΖΓ}{ΖΕ}$$

$$=\frac{ΓΕ-ΖΓ}{ΖΕ}$$

$$=\frac{ΖΕ}{ΖΕ}=1$$

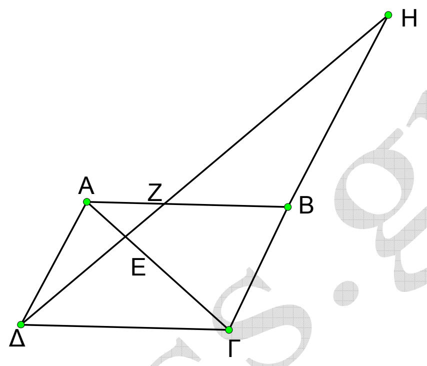
12.

Έστω παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και σημείο $Ε$ που διαιρεί εσωτερικά την διαγώνιο $ΑΓ$ σε λόγο $\frac{1}{3}$. Αν η ευθεία $ΔΕ$ τέμνει την $ΑΒ$ στο $Ζ$ και την προέκταση της $ΒΓ$ στο $Η$, να αποδείξετε ότι

i) $ΕΖ = \frac{1}{4}ΔΖ$ **ii)** $ΕΗ = \frac{3}{4}ΔΗ$

Προτεινόμενη λύση

i)



Από υπόθεση είναι $\frac{ΕΑ}{ΕΓ} = \frac{1}{3}$

$ΑΖ \,//\, ΔΓ \Rightarrow \frac{ΕΑ}{ΕΓ} = \frac{ΕΖ}{ΕΔ} = \frac{1}{3}$

$$\frac{ΕΖ}{ΕΔ + ΕΖ} = \frac{1}{1+3}$$

$$\frac{ΕΖ}{ΔΖ} = \frac{1}{4}$$

$$ΕΖ = \frac{1}{4}ΔΖ$$

ii)

$ΑΔ \,//\, ΓΗ \Rightarrow \frac{ΕΑ}{ΕΓ} = \frac{ΕΔ}{ΕΗ} = \frac{1}{3}$

$$\frac{ΕΔ}{ΕΗ} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{ΕΔ + ΕΗ}{ΕΗ} = \frac{1+3}{3}$$

$$\frac{ΔΗ}{ΕΗ} = \frac{4}{3}$$

$$ΕΗ = \frac{3}{4}ΔΗ$$